Devoir surveillé du 17 mars 2023 (2h00)

Supports de cours autorisé.
Calculatrice non autorisée.

Consigne générale : Mettre en évidence le résultat des questions et écrire le détail pour arriver au résultat.

Exercice 1. EDO DU PREMIER ORDRE À VARIABLES SÉPARABLES

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'(t) = -2y(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'(t) - 6t^2y^2(t) = 0, \ \forall t \in]0; +\infty[\\ y(1) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Correction. EDO du premier ordre à variables séparables

1. Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(t) = 0$ pour tout t est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO sera non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$y'(t) = -2y(t) \Longrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -2 \Longrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -2 \int dt$$
$$\Longrightarrow \ln(|y|) = -2t + C \Longrightarrow y(t) = e^{-2t+C}.$$

En imposant la CI on obtient $e^C = 3$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\boxed{y(t) = 3e^{-2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}}.$$

2. Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(t) = 0$ pour tout t est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO sera non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$y'(t) - 6t^2y^2(t) = 0 \Longrightarrow \frac{y'(t)}{y^2(t)} = 6t^2 \Longrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = 6 \int t^2 dt$$
$$\Longrightarrow -\frac{1}{y} = 2t^3 + C \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{-2t^3 + C}.$$

En imposant la CI on obtient $\frac{1}{-2+C} = -\frac{1}{2}$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{-2t^3}, \ \forall t \in]0; +\infty[}.$$

Exercice 2. EDO LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants : $\forall t \in \mathbb{R}$

1. $\begin{cases} y'(t) + y(t) = te^{-t}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y'(t) + (4t^3+5)y(t) = t^3 e^{-5t}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y'(t) + y(t) = \cos(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Correction. EDO linéaires du premier ordre

1. On a $a(t) = 1$, $b(t) = 1$ et $g(t) = te^{-t}$. On a alors :
   * $A(t) = \displaystyle\int dt = t$,
   * $B(t) = \displaystyle\int te^{-t}e^{A(t)}dt = \int tdt = \frac{t^2}{2}$.

   Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions
   $$y(t) = \left(C + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$
   On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0) = 1$; comme $y(0) = C + \frac{1}{2}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction
   $$\boxed{y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t},\ \forall t \in \mathbb{R}}$$

2. On a $a(t) = 1$, $b(t) = 4x^3 + 5$ et $g(t) = t^3 e^{-5t}$. On a alors :
   * $A(t) = \displaystyle\int 4t^3 + 5dt = t^4 + 5t$,
   * $B(t) = \displaystyle\int t^3 e^{-5t} e^{A(t)}dt = \int t^3 e^{t^4}dt = \frac{e^{t^4}}{4}$.

   Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions
   $$y(t) = \left(C - \frac{e^{-t^4}}{4}\right)e^{-t^4-5t}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$
   On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0) = 1$; comme $y(0) = C + \frac{1}{4}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction
   $$\boxed{y(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{e^{t^4}}{4}\right)e^{-t^4-5t},\ \forall t \in \mathbb{R}}$$

3. On a $a(t) = 1$, $b(t) = 1$ et $g(t) = \cos(t)$. On a alors :
   * $A(t) = \displaystyle\int dt = t$,
   * $B(t) = \displaystyle\int \cos(t)e^{A(t)}dt = \int e^t\cos(t)dt = \frac{e^t}{2}(\cos(t) + \sin(t))$,
     sachant qu'à l'aide d'une double IPP on a :
     $$\int e^t\cos(t)dt = -\int e^t\sin(t)dt + e^t\sin(t) = -\int e^t\cos(t)dt + e^t\cos(t) + e^t\sin(t)$$
     $$\iff \int e^t\cos(t)dt = \frac{e^t}{2}(\cos(t) + \sin(t))$$

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions

$$y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right), \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0) = 1$; comme $y(0) = C + \frac{1}{2}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\Big(e^{-t} + \cos(t) + \sin(t)\Big), \ \forall t \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3. EDO LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants : $\forall t \in \mathbb{R}$

1. $\begin{cases} y''(t) - 2\sqrt{2}y'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

Correction. EDO linéaires du second ordre à coefficients constants

1. L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 8 = 0$, donc une unique racine double $\lambda = \sqrt{2}$. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$y(t) = (C_1 t + C_2)e^{\sqrt{2}t}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Déterminons la valeur des constantes C_1 et C_2 correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. On a

$$y'(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + (C_1 t + C_2)\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}$$

donc

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 + \sqrt{2}C_2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

L'unique solution du problème de Cauchy est :

$$\boxed{y(t) = \Big((3 - 2\sqrt{2})t + 2\Big)\, e^{\sqrt{2}t}, \ \forall t \in \mathbb{R}}.$$

2. L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$y(t) = \left(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right) e^{\sigma t}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

avec $\omega = \frac{\sqrt{|-4|}}{2} = 1$ et $\sigma = -\frac{-4}{2} = 2$.

Déterminons la valeur des constantes C_1 et C_2 correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On a

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Big(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)\Big)2e^{2t} + \Big(-C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)\Big)e^{2t} \\ &= \Big((2C_1 + C_2)\cos(t) + (2C_2 - C_1)\sin(t)\Big)e^{2t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

L'unique solution du problème de Cauchy est :

$$\boxed{y(t) = \Big(\cos(t) - \sin(t)\Big)e^{2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}}.$$

Exercice 4. DÉRIVATION NUMÉRIQUE

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ et $x_0 - h$ appartiennent à I on peut écrire les formules de Taylor autour de x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{24} + \dots \tag{1}$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - f'''(x_0)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{24} + \dots \tag{2}$$

1. Grace aux equations (1) et (2) trouver une approximation de la dérivée d'ordre deux de f en x_0, c'est à dire trouver une approximation de $f''(x_0)$.
2. De quel ordre est cette approximation de $f''(x_0)$? Justifiez vôtre réponse.

Correction. Dérivation numérique

1. En sommant l'équation (1) et l'équation (2) on obtient :

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + 2f''(x_0)\frac{h^2}{2} + 2f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{24} + \dots$$

Ce qui nous donne alors :

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + f^{(4)}(x_0)\frac{h^2}{12} + \dots$$

On a alors une approximation de $f''(x_0)$:

$$\boxed{f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}}.$$

2. Cette approximation est d'ordre 2 car les termes qui ne sont pas pris en compte sont inférieurs ou égale à $\dfrac{f^{(4)}(x_0)}{12}h^2$.

Exercice 5. APPROXIMATION NUMÉRIQUE D'EDO

Considérons les problèmes de Cauchy suivants : $\forall t \in I = [0; 10]$

$$A. \quad \begin{cases} y'(t) + \cos(y(t)) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad\qquad B. \quad \begin{cases} y'(t) + 6y(t) = e^t, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $I = [0; 10]$, en N_h intervalles $[t_n; t_{n+1}]$ de largeur h avec $t_n = nh$. Pour chaque nœud t_n, on note $y_n = y(t_n)$ et on cherche la valeur inconnue u_n qui approche la valeur exacte y_n.

1. Écrire le schéma d'Euler **explicite** pour les problèmes de Cauchy A et B.

2. Écrire le schéma d'Euler **implicite** pour les problèmes de Cauchy A et B.
   Si c'est possible mettre le schéma sous forme explicite.

3. Écrire le schéma d'Euler **modifié** pour les problèmes de Cauchy A et B.

Correction. Approximation numérique d'EDO

1. Pour le problème de Cauchy A on a :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 1; \\ u_{n+1} = u_n - h\cos(u_n) \end{cases}}.$$

   Pour le problème de Cauchy B on a :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 3; \\ u_{n+1} = u_n + h(e^{t_n} - 6u_n) \end{cases}}.$$

2. Pour le problème de Cauchy A on a :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 1; \\ u_{n+1} = u_n - h\cos(u_{n+1}) \end{cases}}.$$

   Pour le problème de Cauchy B on a :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 3; \\ u_{n+1} = u_n + h(e^{t_{n+1}} - 6u_{n+1}) \end{cases}} \iff \boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 3; \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1-6h}\Big(u_n + he^{t_{n+1}}\Big) \end{cases}}.$$

3. Pour le problème de Cauchy A on a :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 1; \\ \tilde{u}_{n+\frac{1}{2}} = u_n - \frac{h}{2}\cos(u_n) \\ u_{n+1} = u_n - h\cos(\tilde{u}_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}}.$$

   Pour le problème de Cauchy B on a :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = y(0) = 3; \\ \tilde{u}_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{h}{2}(e^{t_n} - 6u_n) \\ u_{n+1} = u_n + h(e^{t_n+\frac{h}{2}} - 6\tilde{u}_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}}.$$

Exercice 6. Code Matlab

Commenter ce que font les lignes du code suivant :

```
A = [3,1,5;4,7,2;5,4,3];
B = [2,1;1,2;1,1];
x = [10;3;1];
y = [9,2,1];
tt = linspace(1,10,100);
f=@(x)[sin(x)cos(x)];
A*B;
A*x;
x+y';
A.*B;
A./B;
plot(tt,f(tt));
```

Correction. Code Matlab

ligne 1 : Créé une matrice 3×3

ligne 2 : Créé une matrice 3×2

ligne 3 : Créé un vecteur colonne de taille 3

ligne 4 : Créé un vecteur ligne de taille 3

ligne 5 : Créé un vecteur qui contient 100 nombres équirépartis entre 1 et 10

ligne 6 : Défini la fonction f qui à x associe $\cos(x)\sin(x)$

ligne 7 : Produit matriciel de A par B

ligne 8 : Produit matriciel de A par x

ligne 9 : Somme du vecteur x et de la transposée de y

ligne 10 : Produit terme à terme A par B

ligne 11 : Division terme à terme de A par B

ligne 12 : Trace de la fonction f pour tous les elements de tt