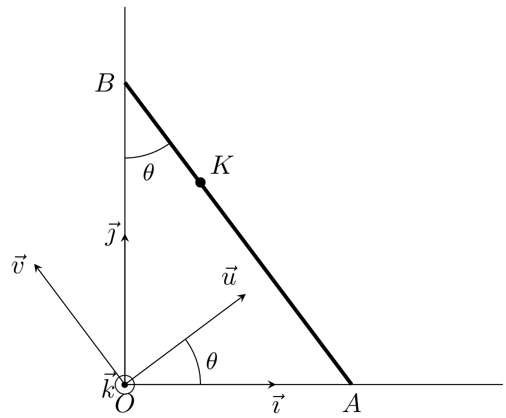
Contrôle continu du 22 février 2022 (1h30)

Aucun document autorisé

Soit le repère orthonormé direct $R_o(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (l'axe $O\vec{\jmath}$ vertical ascendant) étant supposé galiléen, on désigne $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ l'accélération de pesanteur.
Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'équilibre d'un solide S.
S est constitué d'une barre homogène de masse m, de longueur l et d'extrémités A et B sur laquelle on a fixé une masse ponctuelle M en un point K.
S est tel que le point A est en contact avec l'axe $O\vec{\imath}$ et B est en contact avec l'axe $O\vec{\jmath}$.
On note $T_A\vec{\imath} + N_A\vec{\jmath}$ la réaction du support sur S au point A. On note $T_B\vec{\jmath} + N_B\vec{\imath}$ la réaction du support sur S au point B.
On désigne $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AB} = l\vec{v}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2l}{3}\vec{v}$. On introduit $\vec{u}$ le vecteur tel que $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit orthonormé direct. On note l'angle $\theta = (\vec{\imath}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$ et on suppose que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.



1. Rappeler la condition d'équilibre d'un solide.
2. Dans cette question, on considère que le contact en A et en B se fait sans frottement et on exerce en A une force ponctuelle $F\vec{\imath}$.
   (a) Que peut-on déduire si le contact au point A et B se fait sans frottement ?
   (b) Donner au point A le torseur des efforts qui s'exercent sur S.
   (c) Quelle doit être l'intensité de F pour que $\theta = \frac{\pi}{6}$ soit compatible avec l'équilibre.
   (d) Le résultat trouvé est-il cohérent ?
3. Rappeler la loi de Coulomb.
4. Dans cette question, on considère que le contact au point A suit une loi de Coulomb de coefficient $f = \frac{1}{2}$ et que celui en B se fait sans frottement.
   On exerce en B une force ponctuelle $Q\vec{\jmath}$ avec $Q = \frac{g}{2}(M + m)$.
   (a) Donner au point B le torseur des efforts qui s'exercent sur S.
   (b) Déterminer T_A, N_A et N_B en fonction de θ dans le cas où S est à l'équilibre.
   (c) Quelle est la valeur maximale de θ noté θ_{max} pour que l'équilibre soit possible.

Contrôle continu du 22 février 2022
Correction

---

1. On a équilibre quand $\mathcal{T}_{eff} = 0$.
2. (a) Contact sans frottement en A et en B implique que $T_A = 0$ et que $T_B = 0$.

   (b)

$$\mathcal{T}_{eff} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{N_A} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_A}_{1} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{N_B} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_B}_{2} + \underbrace{\begin{Bmatrix} M\vec{g} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_K}_{3} + \underbrace{\begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_G}_{4} + \underbrace{\begin{Bmatrix} F\vec{\imath} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_A}_{5}$$

$$2) \quad \overrightarrow{M_A} = N_B\vec{\imath} \wedge \overrightarrow{BA} = N_B\vec{\imath} \wedge l(\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}) = -N_B l\cos\theta\vec{k}$$

$$3) \quad \overrightarrow{M_A} = M\vec{g} \wedge \overrightarrow{KA} = -Mg\vec{\jmath} \wedge \frac{2l}{3}(\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\jmath) = \frac{2Mlg}{3}\sin\theta\vec{k}$$

$$4) \quad \overrightarrow{M_A} = m\vec{g} \wedge \overrightarrow{GA} = -mg\vec{\jmath} \wedge \frac{l}{2}(\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}) = \frac{mgl}{2}\sin\theta\vec{k}$$

   (c) Équilibre $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ N_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ -N_B l\cos\theta + \frac{2Mgl}{3}\sin\theta + \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_B = -F, \quad N_A = g(m+M) \\ \\ N_B = \tan\theta(\frac{2}{3}M + \frac{1}{2}m)g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_B = \tan\theta(\frac{2}{3}M + \frac{1}{2}m)g, \quad N_A = g(m+M) \\ \\ F = -\tan\theta(\frac{2}{3}M + \frac{1}{2}m)g \end{cases}$$

   avec $\theta = \frac{\pi}{6}$ on a $F = \frac{g}{\sqrt{3}}(\frac{2}{3}M + \frac{1}{2}m)$.

   (d) On a $\tan\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad F < 0$. F empêche bien la barre de glisser sur l'axe $O\vec{\imath}$. De plus F est bien homogène à une force.

3. Au point de contact entre deux solide on a une force normale $\overrightarrow{N}$ et une force tangentielle $\overrightarrow{T}$. La loi de coulomb nous dit que ces deux forces satisfont $||\overrightarrow{N}||f \geq ||\overrightarrow{N}||$ avec $f \in \mathbb{R}_+^*$.

4. (a)

$$\mathcal{T}_{eff} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{N_A} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A}_{1} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{T_A} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A}_{2} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{N_B} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B}_{3} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G}_{4} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} M\vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G}_{5} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} Q\vec{\jmath} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B}_{6}$$

$$\begin{array}{ll} 1) & \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{N_A} \wedge \overrightarrow{AB} = N_A\vec{\jmath} \wedge l(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = N_A l \sin\theta\vec{k} \\ 2) & \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{T_A} \wedge \overrightarrow{AB} = T_A\vec{\imath} \wedge l(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = T_A l \cos\theta\vec{k} \\ 4) & \overrightarrow{M_B} = m\vec{g} \wedge \overrightarrow{GB} = -mg\dfrac{l}{2}\vec{\jmath} \wedge (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = -\dfrac{mgl}{2}\sin\theta\vec{k} \\ 5) & \overrightarrow{M_B} = M\vec{g} \wedge \overrightarrow{KB} = -Mg\dfrac{l}{3}\vec{\jmath} \wedge (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = -\dfrac{Mgl}{3}\sin\theta\vec{k} \end{array}$$

(b) Équilibre $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} T_A \\ N_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ N_A l \sin\theta + T_A l \cos\theta - gl\sin\theta(\frac{m}{2} + \frac{M}{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_A = -N_B, \quad N_A = mg + Mg - Q \\ \\ T_A l \cos\theta = -N_A l \sin\theta + gl\sin\theta(\frac{m}{2} + \frac{M}{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_A = -N_B, \quad N_A = \frac{g}{2}(m + M) \\ \\ T_A = -N_A \tan\theta + g\tan\theta(\frac{m}{2} + \frac{M}{3}) \\ \quad \Leftrightarrow T_A = g\tan\theta(\frac{m}{2} + \frac{M}{3} - \frac{m}{2} - \frac{M}{2}) \\ \quad \Leftrightarrow T_A = -\frac{1}{6}Mg\tan\theta \end{cases}$$

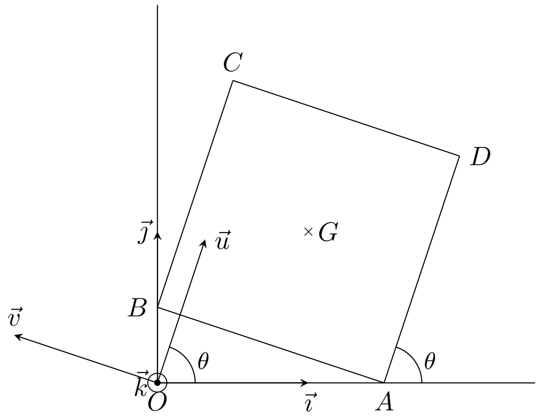
(c) On atteint θ critique quand $\frac{N_A}{2} = T_A$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow g(\frac{m}{4} + \frac{M}{4}) = \frac{g}{6}\tan\theta_{max} \\ &\Leftrightarrow \tan\theta_{max} = \frac{3}{2}(m + M) \\ &\Leftrightarrow \theta_{max} = \tan^{-1}(\frac{3}{2}(m + M)) \end{aligned}$$

Contrôle continu du 23 février 2022 (1h30)

Aucun document autorisé

Soit le repère orthonormé direct $R_o(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (l'axe $O\vec{\jmath}$ vertical ascendant) étant supposé galiléen, on désigne $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ l'accélération de pesanteur.
Dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'équilibre d'un solide S.
S est constitué d'une plaque carré homogène de coté l, de masse m et de centre G.
S est tel que le point A est en contact avec l'axe $O\vec{\imath}$ et B est en contact avec l'axe $O\vec{\jmath}$.
On note $T_A\vec{\imath} + N_A\vec{\jmath}$ la réaction du support sur S au point A. On note $T_B\vec{\jmath} + N_B\vec{\imath}$ la réaction du support sur S au point B.
On désigne $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AB} = l\vec{v}$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{AD} = l\vec{u}$.
On introduit $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ le repère orthonormé direct. On note l'angle $\theta = (\vec{\imath}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{k}$ et on suppose que $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.



1. Rappeler la condition d'équilibre d'un solide.
2. Dans cette question, on considère que le contact en A et en B se fait sans frottement et on exerce en A une force ponctuelle $F\vec{\imath}$.
   (a) Que peut-on déduire si le contact au point A et B se fait sans frottement ?
   (b) Donner au point A le torseur des efforts qui s'exercent sur S.
   (c) Quelle doit être l'intensité de F pour que $\theta = \frac{\pi}{3}$ soit compatible avec l'équilibre.
   (d) Le résultat trouvé est-il cohérent ?
3. Rappeler la loi de Coulomb.
4. Dans cette question, on considère que le contact au point A suit une loi de Coulomb de coefficient $f = \frac{1}{2}$ et que celui en B se fait sans frottement.
   On exerce en B une force ponctuelle $Q\vec{\jmath}$ avec $Q = \frac{mg}{3}$.
   (a) Donner au point B le torseur des efforts qui s'exercent sur S.
   (b) Déterminer T_A, N_A et N_B en fonction de θ dans le cas où S est à l'équilibre.
   (c) Quelle est la valeur maximale de θ noté θ_{max} pour que l'équilibre soit possible.

Contrôle continu du 22 février 2022
Correction

---

1. On a équilibre quand $\mathcal{T}_{eff} = 0$.
2. (a) Contact sans frottement en A et en B implique que $T_A = 0$ et que $T_B = 0$.

   (b)

$$\mathcal{T}_{eff} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{N_A} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A}_{1} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{N_B} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B}_{2} + \underbrace{\begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G}_{3} + \underbrace{\begin{Bmatrix} F\vec{\imath} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A}_{4}$$

$$2) \quad \overrightarrow{M_A} = N_B\vec{\imath} \wedge \overrightarrow{BA} = N_B\vec{\imath} \wedge l(\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}) = -N_B l\cos\theta\vec{k}$$

$$3) \quad \overrightarrow{M_A} = m\vec{g} \wedge \overrightarrow{GA} = -mg\vec{\jmath} \wedge \frac{l}{2}(-\vec{u} - \vec{v})$$

$$= -mg\frac{l}{2}\vec{\jmath} \wedge (-\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath} + \sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}) = -mg\frac{l}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\vec{k}$$

   (c) Équilibre $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ N_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ -N_B l\cos\theta - mg\frac{l}{2}(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_B = -F, \quad N_A = mg \\ \\ N_B = -\frac{mg}{2}(1 - \tan\theta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_B = -\frac{mg}{2}(1 - \tan\theta), \quad N_A = mg \\ \\ F = \frac{mg}{2}(1 - \tan\theta) \end{cases}$$

   avec $\theta = \frac{\pi}{3}$ on a $F = mg\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

   (d) On a $1 - \tan(\frac{\pi}{3}) < 0 \quad \Rightarrow \quad F < 0$. F empêche bien la barre de glisser sur l'axe $O\vec{\imath}$. De plus F est bien homogène à une force.

3. Au point de contact entre deux solide on a une force normale $\overrightarrow{N}$ et une force tangentielle $\overrightarrow{T}$. La loi de coulomb nous dit que ces deux forces satisfont $||\overrightarrow{N}||f \geq ||\overrightarrow{N}||$ avec $f \in \mathbb{R}_+^*$.

4. (a)

$$\mathcal{T}_{eff} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{N_A} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A}_{1} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{T_A} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A}_{2} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{N_B} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B}_{3} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G}_{4} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} Q\vec{\jmath} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B}_{5}$$

$$1) \quad \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{N_A} \wedge \overrightarrow{AB} = N_A\vec{\jmath} \wedge l(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = N_A l \sin\theta\vec{k}$$

$$2) \quad \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{T_A} \wedge \overrightarrow{AB} = T_A\vec{\imath} \wedge l(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = T_A l \cos\theta\vec{k}$$

$$4) \quad \overrightarrow{M_B} = m\vec{g} \wedge \overrightarrow{GB} = -mg\vec{\jmath} \wedge \frac{l}{2}(-\vec{u} + \vec{v})$$

$$= -mg\frac{l}{2}\vec{\jmath} \wedge (-\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath} - \sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = -mg\frac{l}{2}(\cos\theta + \sin\theta)\vec{k}$$

(b) Équilibre $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{eff} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} T_A \\ N_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ N_A l \sin\theta + T_A l \cos\theta - mg\frac{l}{2}(\cos\theta + \sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_A = -N_B, \quad N_A = mg - Q \\ \\ T_A l \cos\theta = -N_A l \sin\theta + mg\frac{l}{2}(\cos\theta + \sin\theta) \\ \quad \Leftrightarrow \quad T_A = -N_A \tan\theta + \frac{mg}{2}(1 + \tan\theta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_B = -\frac{mg}{6}(3 - \tan\theta), \quad N_A = \frac{2}{3}mg \\ \\ T_A = -\frac{2}{3}mg\tan\theta + \frac{mg}{2}(1 + \tan\theta) = \frac{mg}{6}(3 - \tan\theta) \end{cases}$$

(c) On atteint θ critique quand $\frac{N_A}{2} = T_A$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{mg}{3} = \frac{mg}{6}(3 - \tan\theta_{max}) \\ &\Leftrightarrow 3 - \tan\theta_{max} = 2 \\ &\Leftrightarrow \tan\theta_{max} = 1 \\ &\Leftrightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \end{aligned}$$